Finanz- und Versicherungsmathematik: altmodische Buchhaltung oder spannendes Berufs- und Forschungsfeld?

Julia Eisenberg, Stefan Gerhold, TU Wien; Christina Ziehaus, Generali

In diesem Artikel geben wir einige Antworten auf die Frage, warum Finanz- und Versicherungsmathematik ein spannendes Berufs- und Forschungsfeld sein kann. Die Aufgaben und Herausforderungen der Lebensversicherungsmathematik werden anhand von klassischen Konzepten der Ab- und Erlebensversicherung dargestellt. Der Ausblick in die Sachversicherung verdeutlicht, wie mathematisch und ökono-misch komplex die Fragestellungen sein können. Im finanzmathematischen Teil wird die Optionsbewer-tung anhand eines einfachen Beispiels vorgestellt, mit Ausblicken auf weiterführende Themen und andere Einsatzmöglichkeiten der Mathematik in Banken. Zum Schluss werden die Berufsaussichten nach dem Studium der Finanz- und Versicherungsmathematik diskutiert.

1. Versicherungsmathematik

Versicherungen sind wichtig für unsere Gesellschaft, weil sie Sicherheit und Stabilität schaffen. Niemand kann genau vorhersagen, wann ein Unfall, ein Schaden oder ein Todesfall eintritt – aber die Folgen können für Einzelne oder Familien finanziell sehr belastend sein. Durch Versicherungen wird dieses Risiko auf viele Schultern verteilt: Alle zahlen regelmäßig kleine Beiträge (Prämien) ein, und wer tatsächlich einen Schaden erleidet, bekommt Unterstützung.

Der Klimawandel macht Versicherungen heute noch wichtiger als früher. Durch mehr extreme Wetterereignisse – wie Überschwemmungen, Stürme, Dürren oder Waldbrände – entstehen große Schäden an Häusern, Betrieben und in der Landwirtschaft. Diese Risiken kann kaum jemand allein tragen.

Der Klimawandel wirkt sich auch direkt auf unsere Gesundheit aus. Besonders ältere Menschen und Menschen mit Herz-Kreislauf- oder Atemwegserkrankungen sind durch Hitzewellen gefährdet. Auch Allergien nehmen zu, da sich Pollenflugzeiten verlängern. Hitzewellen führen zu Hitzschlägen oder Herz-Kreislauf-Versagen, während Überschwemmungen und Stürme direkte Todesfälle verursachen können. Neue Infektionskrankheiten können sich ausbreiten, weil sich Krankheitsträger wie Mücken in wärmeren Regionen ansiedeln.

Versicherungsmathematiker_innen entwickeln und kalibrieren Modelle, die Unsicherheit abbilden. Sie analysieren historische Sterbedaten, erkennen Trends wie steigende Lebenserwartung oder die Auswirkungen des Klimawandels und führen Szenario- sowie Stresstests, etwa für Pandemien, durch. Außerdem berechnen sie faire Prämien und übernehmen viele weitere Aufgaben. Für all das braucht es nicht nur ein fundiertes mathematisches Wissen, sondern auch gesunden Menschenverstand und ein hohes Maß an Kreativität.

In diesem Abschnitt zeigen wir in stark vereinfachter Form, wie die Lebensversicherungsmathematik funktioniert. Für mehr Details verweisen wir auf die Bücher von (Gerber, 2013) und (Dickson et al., 2020). Unter dem Begriff Lebensversicherung werden alle Versicherungen verstanden, die biometrische Risiken wie Tod oder Invalidität absichern, sowie Versicherungen, die der privaten Altersvorsorge dienen. Bei einer Lebensversicherung steht das Tauschgeschäft im Vordergrund. Der Versicherungsnehmer/die Versicherungsnehmerin zahlt Prämien und erhält (später) eine Zahlung, die an sein/ihr Überleben/Sterben gebunden ist.

Die ersten Lebensversicherungsverträge sahen die Zahlung eines bestimmten Betrages (Prämie) an den Versicherer vor. Falls der Versicherungsnehmer (üblicherweise ein Mann) während des Versicherungsjahres starb, so musste der Versicherer eine bestimmte Summe an die Hinterbliebenen auszahlen. So sollte sichergestellt werden, dass Angehörige im Todesfall finanziell abgesichert waren und nicht ohne Unterstützung dastanden.

Die Frage, die man sich als Versicherer und als Kunde stellt, ist:

“Was ist eine faire Prämie für einen Lebensversicherungsvertrag?”

Wird die Prämie zu hoch angesetzt, schließen nur wenige Menschen eine Lebensversicherung ab. Dadurch können sie im Todesfall nicht für ihre Angehörigen vorsorgen – zum Nachteil der Kunden. Aber auch das Versicherungsunternehmen verliert, weil es kaum Verträge abschließen kann.

Wird die Prämie dagegen zu niedrig festgelegt, reichen die Einnahmen nicht aus, um die zugesagten Leistungen zu bezahlen. Das Unternehmen gerät in finanzielle Schwierigkeiten oder geht sogar pleite. In diesem Fall entstehen ebenfalls Nachteile für beide Seiten: Die Kunden verlieren ihren Schutz, und das Unternehmen seinen Bestand.

Welche Faktoren können die Prämie beeinflussen?

- Die einjährigen Verträge sind einfacher zu modellieren. Aber die Prämien würden sich von Jahr zu Jahr erhöhen, weil die Sterblichkeit wächst. Ist es fair den älteren Personen gegenüber?
- Längerfristige Verträge sind komplizierter zu modellieren (da *Zinsen* variieren und *Sterbewahrscheinlichkeiten* sich ändern können).

Wir halten also fest, dass Sterblichkeiten und Zinsen einen großen Einfluss auf die Prämie haben.

Zinsen

• Betrachte ein Kapital $K(t)$ zum Zeitpunkt t. Man definiert den *Zinssatz* als Kapitalzuwachs während eines Intervalls (t_1, t_2), bezogen auf die Kapitaleinheit am Beginn des Intervalls, das heißt

$$i(t_1, t_2) := \frac{K(t_2) - K(t_1)}{K(t_1)}.$$

Als Zinsfuß bezeichnet man den Zinssatz in Prozent ausgedrückt: $p := 100 \cdot i$.

Wir schreiben $i(h)$, wenn nur die Intervalllänge h, nicht aber der Anfang t_1 oder das Ende t_2 von Bedeutung sind.

Für eine Einheitsperiode (z. B. ein Jahr) schreiben wir einfach i.

• Ist $K(t_1)$ der Anfangs- und $K(t_2)$ der Endwert eines Kapitals, so heißt

$$r(t_1, t_2) := \frac{K(t_2)}{K(t_1)} = 1 + i(t_1, t_2)$$

der *Aufzinsungfaktor*.

• Der Kehrwert des Aufzinsungsfaktors

$$v(t_1, t_2) := \frac{K(t_1)}{K(t_2)} = \frac{1}{1 + i(t_1, t_2)} = \frac{1}{r(t_1, t_2)}$$

ist der *Abzinsungs*- oder *Diskontierungsfaktor*.

• Den Kapitalzuwachs je Kapitaleinheit, bezogen auf die Kapitaleinheit am Ende des Intervalls (t_1, t_2), nennt man *Diskontrate*

$$d(t_1, t_2) := \frac{K(t_2) - K(t_1)}{K(t_2)}.$$

Formen der Verzinsung

Man unterscheidet folgende Formen der Verzinsung:

• Einfache oder lineare Verzinsung:

Werden Zinsen nur auf das Anfangskapital berechnet, nicht jedoch auf bereits "verdiente" Zinsen, so spricht man von einfacher Verzinsung. Folgender Zusammenhang liegt also vor:

$$K(t) = K(0)(1 + it) \ ,$$

bzw.:

$$K(0) = \frac{K(t)}{1+it} \; .$$

Daraus ergibt sich:

$$i(t) = it, \;\; r(t) = 1 + it, \;\; v(t) = \frac{1}{1+it}.$$

• **Zusammengesetzte oder exponentielle Verzinsung:**

Bei der zusammengesetzten Verzinsung werden Zinsen ihrerseits wieder verzinst, daher nennt man sie auch Verzinsung mit Zinseszins. Es ergeben sich also folgende Zusammenhänge:

$$K(t) = K(0)(1+i)^t \quad \text{und} \quad r(t) = (1+i)^t = r^t, \quad \text{mit} \quad r := 1 + i.$$

• **Gemischte Verzinsung:**

In der Praxis ebenfalls sehr wichtig ist die gemischte Verzinsung, bei der für ganze Jahre (bzw. Zeiteinheiten) die zusammengesetzte Verzinsung angewandt und für Bruchteile eines Jahres linear interpoliert wird. Es gilt:

$$K(t) = K(0) r^{\lfloor t \rfloor}(1 + i(t - \lfloor t \rfloor)), \text{wobei } \lfloor t \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq t\}.$$

$\lfloor t \rfloor$ ist also die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t.

Sterblichkeit

Die zweite bestimmende Komponente in der Lebensversicherungsmathematik neben der Zinsrechnung ist die Berechnung der Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten von Personen. Insbesondere geht es bei der Sterbewahrscheinlichkeit um die Abschätzung der Restlebenszeit einer Person. Hierzu hat sich in der Versicherungsmathematik eine eigene Notation entwickelt.

Definition:

Die Zufallsvariable T_0 modelliert die *Gesamtlebenszeit* einer Person. Als Einheit für T_0 wählen wir Jahre, wobei diese Zahl aber nicht ganzzahlig sein muss, sondern das exakte Alter zum Zeitpunkt des Todes (z. B. 81,345 Jahre) angibt. Für festes Alter $x \geq 0$ bezeichnen wir mit T_x, oder manchmal auch nur mit T, wenn das Alter x aus dem Kontext klar hervorgeht, die Zufallsvariable, die die *Restlebenszeit einer x-jährigen Person* modelliert. Mit anderen Worten bezeichnet T_x die Zufallsvariable $T_0 - x$, unter der Bedingung, dass $T_0 > x$. Wird zwischen Männern und Frauen unterschieden, so bezeichnet x meist das Alter eines Mannes und y das Alter einer Frau. Mit $G = G_x$ wird die Verteilungsfunktion von T_x bezeichnet.

Es gilt also:

$$G_x(t) = G(t) = \mathbb{P}[T_0 \leq x + t | T_0 > x] = \mathbb{P}[T_x \leq t] \; .$$

Es wird angenommen, dass eine Dichtefunktion g_x zu dieser Verteilungsfunktion existiert. In der Versicherungsmathematik sind folgende Bezeichnungen von grundlegender Bedeutung:

$$_tq_x := \mathbb{P}[T_x \leq t] = G_x(t) \quad \text{und} \quad _tp_x := \mathbb{P}[T_x > t] = 1 - G_x(t) \; .$$

Mit anderen Worten: $_tq_x$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, innerhalb von t Jahren (wobei t nicht ganzzahlig sein muss) zu sterben, $_tp_x$ die Gegenwahrscheinlichkeit. Es gilt also: $_tq_x = 1 - {_tp_x}$. Außerdem definiert man

$$_{s|t}q_x := \mathbb{P}\left[s < T_x \leq s + t\right],$$

also die Wahrscheinlichkeit, zuerst s Jahre zu überleben, und dann innerhalb von t Jahren zu sterben. Für diese Wahrscheinlichkeit gilt:

$$_{s|t}q_x = \mathbb{P}\left[T_x \leq s+t\right] - \mathbb{P}\left[T_x \leq s\right] = G_x(s+t) - G_x(s) = {}_{t+s}q_x - {}_sq_x .$$

Ein wichtiger Zusammenhang herrscht zwischen der Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, $t+s$ Jahre zu überleben, und derjenigen einer $(x+s)$-jährigen Person, t Jahre zu überleben.

Es gilt

$$_{t+s}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} \qquad \text{und} \qquad {}_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s} .$$

Nun sind wir fast bereit, die faire Prämie für einen Lebensversicherungsvertrag zu bestimmen.

Ein Vertrag kann sowohl die Zahlung einer einzigen Prämie am Anfang (Einmalprämie), oder auch eine reguläre Folge an Prämienzahlungen vereinbaren. Wichtig ist, dass alle Prämien am Anfang einer Periode bezahlt werden.

Das **Äquivalenzprinzip** ist ein zentrales Grundprinzip der Versicherungsmathematik. *Es bedeutet, dass die eingenommenen Prämien eines Versicherers genau ausreichen sollen, um die erwarteten Versicherungsleistungen (sowie die Kosten) zu decken.*

Die traditionellen Lebensversicherungsverträge

- **Ablebensversicherung (auch Risikolebensversicherung):** Eine Ablebensversicherung zahlt im Falle des Todes die Versicherungssumme komplett an die Hinterbliebenen aus.
- **Erlebensversicherung:** Eine Erlebensversicherung ist eine kapitalbildende Lebensversicherung, die bei Erreichen eines bestimmten Zeitpunktes, bspw. dem Pensionsantritt der versicherten Person, die Leistung ausbezahlt.
- **Mischform aus Er- und Ablebensversicherung:** Erlebt der Versicherungsnehmer das Ende der Laufzeit, werden das bis dahin angesparte Kapital sowie die entstandenen Gewinnanteile ausbezahlt. Die Auszahlung kann dabei als Einmalzahlung oder als Rente vereinbart werden.
  Für den Fall, dass der Versicherungsnehmer während der Laufzeit verstirbt, wird die vereinbarte Versicherungssumme an die Begünstigten ausbezahlt.

Beispiel (Erlebensversicherung)

Man stelle sich vor, wir sind im Jahre 2015. Gesucht wird die Einmalprämie für eine 10-jährige Erlebensversicherung einer 50-jährigen Person. Wir nehmen als Zinssatz 1,25% (mit zusammengesetzter Verzinsung) und als Versicherungssumme 50000 € an.

Frage 1: Was sind die 50000 €, die ggf. in 2025 ausbezahlt werden, im Jahr 2015 wert?

Dies kann leicht beantwortet werden, da uns der Zins aus dem Jahr 2015 vorliegt. Die 50000 €, die im Jahr 2025 möglicherweise ausbezahlt werden, haben 2015 den Barwert

$$50000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}0125)^{10}} = 44159{,}05 \; .$$

Frage 2: Wie berücksichtigt man einen möglichen Sterbefall?

Die versicherte Person könnte zwischen den Jahren 2015 und 2025 sterben, wodurch das Versicherungsunternehmen nichts zahlen müsste.

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 50-jährige Person, die nächsten 10 Jahre zu überleben, als Produkt der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten geschrieben werden kann. In einer Sterbetafel findet man allerdings nur die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_{50+k}. Wir berechnen daher

$$_{10}p_{50} = \prod_{k=0}^{9} p_{50+k} = \prod_{k=0}^{9} (1 - q_{50+k}) \; .$$

Mit Hilfe der Unisex-Sterbetafel 2014[1] finden wir, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 50-jährige Person die nächsten 10 Jahre zu überleben gegeben ist als

$$\prod_{k=0}^{9} p_{50+k} = \mathbf{0{,}9598}\ .$$

Die erwartete Leistung entspricht also

$$\frac{50000}{1{,}0125^{10}} 0{,}9598 = \mathbf{42383{,}85}\ .$$

zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses in 2015. Der Betrag $42383{,}85$ € (nun ohne jegliche Kosten gerechnet) wäre als faire Einmalprämie in 2015 zu entrichten, um eine Auszahlung in Höhe von 50000 € (nur im Falle des Erlebens) zu bekommen. Natürlich würde man einen derart hohen Betrag i. d. R. nicht auf einmal zahlen wollen. Die Prämien können, wie schon vorher erwähnt, auch laufend (monatlich, jährlich etc.) bezahlt werden. Dadurch bringt man zusätzliche Unsicherheit in das System.

Ausblick

Moderne versicherungsmathematische Forschung ist weit mehr als die klassische Kalkulation von fairen Prämien. Sie bewegt sich an der Schnittstelle von Mathematik, Datenwissenschaft, Wirtschaft und Umwelt – und stellt sich dabei hochaktuellen gesellschaftlichen und technologischen Herausforderungen.

Ein sich sehr schnell entwickelndes Forschungsfeld ist der Einsatz von Künstlicher Intelligenz (KI) und Maschinellem Lernen, etwa zur Verbesserung von Risikomodellen, Schadenprognosen oder zur automatisierten Verarbeitung großer Datenmengen. Durch moderne Algorithmen lassen sich Muster erkennen und Zusammenhänge viel besser erfassen als mit klassischen Methoden. Allerdings ist die Gefahr von Bias (systematischer Verzerrungen) oder unbeabsichtigter Diskriminierung in der Tarifierung sehr real, ganz besonders wenn historische Daten soziale Ungleichheiten widerspiegeln. Die Entwicklung fairer und transparenter Modelle ist daher eine der zentralen Herausforderungen, siehe (Charpentier, 2024).

Parallel dazu gewinnt die Entwicklung nachhaltiger Versicherungs- und Altersvorsorgeprodukte zunehmend an Bedeutung. Angesichts demografischer Veränderungen, wirtschaftlicher Unsicherheiten und Klimawandel werden innovative Lösungen gesucht, die finanzielle Sicherheit mit sozialer und ökologischer Nachhaltigkeit vereinen. Ein Reformvorschlag sowie weitere Literaturangaben findet man z. B. in (Boado-Penas et al., 2021). Neue Erkenntnisse aus der Bodenkunde, Topographie oder Hydrologie fließen verstärkt in die Modellierung ein, etwa zur realistischeren Einschätzung der Häufigkeit und Schwere von Überflutungen.

Insgesamt zeigt sich: Die Versicherungsmathematik ist ein interdisziplinäres und hochdynamisches Forschungsfeld – mit zunehmender gesellschaftlicher Relevanz in einer komplexer werdenden Welt.

2. Finanzmathematik

Früher verstand man unter Finanzmathematik hauptsächlich die elementare Zinsrechnung, die z. B. – wie oben dargelegt – in der Lebensversicherungsmathematik eine zentrale Rolle spielt. In den letzten Jahrzehnten hatte die *stochastische* Finanzmathematik in Forschung und Praxis ein stürmisches Wachstum zu verzeichnen. Sie modelliert aus heutiger Sicht unbekannte Größen wie z. B. künftige Aktienkurse, Wechselkurse und Zinsraten als Zufallsvariablen und untersucht deren Eigenschaften mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ein häufig angeführtes Beispiel, welchen finanziell relevanten Beitrag die Mathematik leisten kann, ist die Bewertung einer Call-Option in einem Marktmodell mit einer Periode und nur zwei möglichen Werten für den Aktienkurs am Ende der Periode. Eine Call-Option gibt dem Besitzer/der Besitzerin das

[1] Jährliche Sterbetafeln 1947 bis 2023 für Österreich:
https://www.statistik.at/en/statistics/population-and-society/population/demographic-indicators-and-tables/life-tables

Recht, den Basiswert (hier eine Aktie) zur Fälligkeit um einen fixen Preis (den Strike-Preis) zu kaufen. Es ist leicht zu sehen, dass der Wert des Calls zum Fälligkeits-Zeitpunkt T durch

$$\max\{S_T - K, 0\} =: (S_T - K)^+$$

gegeben ist, wobei K der Strike ist, und die Zufallsvariable S_T den Basiswert bezeichnet. Call-Optionen ermöglichen höhere Renditen als ein direktes Investment in den Basiswert, bergen jedoch das Risiko eines Totalverlusts, wenn die Option bis zur Fälligkeit behalten wird und der Basiswert unter den Strike fällt. Weiters sind Optionen für Marktteilnehmer_innen interessant, die ein dem Auszahlungsprofil der Option entgegengesetztes Risiko eingegangen sind, welches durch den Kauf der Option vermindert werden kann.

Wir gehen von einem heutigen Aktienkurs $S_0 = 100$ aus. Der Aktienkurs zum Zeitpunkt T wird wie folgt modelliert:

$$S_T = \begin{cases} 101\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}55 \\ 99\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}45. \end{cases} \tag{1}$$

Weiters existiere eine risikolose Anlagemöglichkeit (Bankkonto/Kredit) mit

$$B_0 = B_T = 1.$$

Der Einfachheit halber wurde hier ein Zinssatz von null angenommen, und zwar sowohl für Geldanlagen als auch Kredite. Für den Strike $K = 100$ ist der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T

$$C_T = \begin{cases} 1\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}55, \\ 0\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}45. \end{cases}$$

Was ist nun ein fairer Preis C_0 zum Zeitpunkt 0 für diese Option? Die grundlegende Idee ist die Bildung eines Replikations-Portfolios. Eine noch zu bestimmende Zahl a von Aktien und ein Investment von b ins Bankkonto soll zur Fälligkeit den gleichen Wert wie die Option haben.

	Aktie	Optionswert	Replikations-Portfolio
Szenario 1	101 €	1 €	$101a + b$
Szenario 2	99 €	0 €	$99a + b$

Diese Bedingung an die beiden Szenarien und die beiden Investment-Möglichkeiten ergibt das 2×2 - Gleichungssystem

$$1 = 101a + b \tag{2}$$
$$0 = 99a + b \tag{3}$$

mit der eindeutigen Lösung $(a, b) = (0{,}5\,; -49{,}5)$. Der Wert $b = -49{,}5$ bedeutet, dass ein Kredit von 49,5 € aufgenommen wird. Der heutige Wert des Portfolios ist

$$100a + b = 0{,}5.$$

In dem angenommenen, zugegebenermaßen recht einfachen, Modell muss das auch der Wert der Call-Option sein. Tatsächlich würden andere Werte für den Optionspreis “Arbitrage” ergeben, d. h. einen risikolosen Gewinn. Denn wäre der Optionspreis niedriger, könnte man den Call kaufen und das obige Portfolio mit umgekehrtem Vorzeichen kaufen. Die finanzielle Interpretation der zweiten Komponente ist dann, dass $49{,}5\,€$ auf dem Bankkonto geparkt werden. Für die Aktie bedeutet der negative Wert $-0{,}5$ einen sogenannten Leerverkauf (zum Handel mit “halben” Aktien s. u.). Ein Leerverkauf kann realisiert werden, indem man sich Aktien ausleiht und sofort verkauft. Die geborgten Aktien können jederzeit zurückverlangt werden und müssen dann zum aktuellen Marktpreis gekauft und zurückgegeben werden. Durch die beschriebene Handelsstrategie $(a, b) = (-0{,}5\,; 49{,}5)$ streift man einen risikolosen Gewinn ein, während sich Call und Portfolio zur Fälligkeit, nach Konstruktion des Portfolios, in beiden

Szenarien zu null summieren. Eine analoge Betrachtung zeigt, dass das “no arbitrage” Prinzip auch keinen höheren Preis als $0{,}5$ erlaubt. In der Praxis auftretende Arbitrage-Möglichkeiten werden von aufmerksamen Marktteilnehmer_inne_n ausgenutzt, wodurch die Preise durch Angebot und Nachfrage angepasst werden und die Arbitrage-Möglichkeit wieder verschwindet. Deshalb hat sich “no arbitrage” als tragfähige Annahme für Finanzmarktmodelle erwiesen.

Die Replikations-Strategie liefert nicht nur den Optionspreis, sondern kann von der Bank, die die Option verkauft, verwendet werden, um das aus dem Verkauf entstehende Risiko abzufedern. Eine wichtige Beobachtung ist, dass die Werte der beiden Wahrscheinlichkeiten in (1) für die Optionsbewertung nicht relevant sind, solange beide positiv sind. Diese Wahrscheinlichkeiten wären auch sehr schwer zu schätzen. Alleine ihre Definition wirft Fragen auf, die eher philosophischer als mathematischer Natur sind. Der faire Optionspreis ist also i. d. R. verschieden vom Erwartungswert. In der fortgeschrittenen Theorie der Optionsbewertung werden die Preise allerdings doch als Erwartungswerte dargestellt, jedoch mit sogenannten “risikoneutralen” Wahrscheinlichkeiten. Im Modell (1) ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit z. B. des ersten Szenarios der Preis einer sogenannten Binär-Option, welche genau in diesem Szenario 1 € auszahlt. Dieser Preis kann wiederum durch Replikation mittels Bankkonto und Aktie bestimmt werden.

Zum Wert $a = 0{,}5$ (“kaufe eine halbe Aktie”) in der Lösung von (2) sei Folgendes angemerkt: Optionen werden tatsächlich auf Pakete von z. B. 100 Stück einer Aktie geschrieben, und weiters ist das Konzept der Replikation vor allem für den Options*verkäufer* relevant, also i. d. R. eine Bank, die nicht eine einzige, sondern sehr viele gleichartige Optionen verkauft und gemeinsam repliziert. Deshalb sind Rundungseffekte in der Praxis der Optionsbewertung i. W. irrelevant, was erst vor einigen Jahren auch theoretisch begründet wurde (Gerhold & Krühner, 2018).

Zum Verständnis dieses Standard-Beispiels zur Einführung in die stochastische Finanzmathematik müssen die Begriffe “Aktie”, “Option” und “Leerverkauf” erklärt werden. Das mag erwünscht sein, wenn neben Mathematik auch etwas Finanzbildung vermittelt werden soll. Ein anderer Weg wird in (Dorner, 2025) eingeschlagen, wo das Beispiel eines Currency Forward Contract betrachtet wird. Die mathematische Schlussweise ist ähnlich, aber zur Analyse dieses Derivats werden nur die Begriffe “Zinssatz” und “Wechselkurs” benötigt, die den Schüler_innen vertraut sein dürften. Weiters kann der gefundene Zusammenhang mit frei verfügbaren Marktdaten näherungsweise nachvollzogen werden.

Tatsächlich verwenden Banken natürlich reichhaltigere Modelle als (1), um Derivate zu managen. Weiters gibt es neben Call-Optionen eine Vielzahl anderer Derivate, und die Modelle können auch praxisrelevante Aspekte wie Leerverkaufsbeschränkungen, Transaktionskosten u. v. a. m. abbilden. Leser_innen, die mehr über Optionsbewertung erfahren möchten, sei das klassische Buch (Hull, 2021) empfohlen, von dem beträchtliche Teile auch mit Schul-Mathematikkentnissen zugänglich sind. Nicht umsonst wird es von zahlreichen Praktiker_inne_n als ihr Lieblingsbuch zu diesem Thema bezeichnet und ist schon in zahlreichen Auflagen erschienen.

Generell werden Mathematiker_innen und Absolvent_inn_en verwandter Studienrichtungen in Banken oft eingesetzt, um Risiken – nicht nur solche von Derivaten – zu identifizieren, zu bewerten und zu steuern. Im Folgenden werden exemplarisch drei Tätigkeitsfelder skizziert, die mathematisches Know-How erfordern:

- Abschätzung der Kreditwürdigkeit mit KI-Methoden: Ein neuronales Netz kann aus entsprechend aufbereiteten Eingangsdaten Entscheidungsgrundlagen liefern, ob ein Kreditwunsch positiv oder negativ beantwortet werden sollte. Aus rechtlichen Gründen darf keine “black box” eingesetzt werden, da Ablehnungen begründbar sein müssen (Stichwort: Explainable AI).
- Non-maturing deposits: Dies sind Bankguthaben, für die keine Laufzeit vereinbart wird, wie etwa Sparkonten. Banken benötigen stochastische Modelle für Einlagenvolumen, Marktzins und Einlagenzins, die auch die entsprechenden Korrelationen geeignet abbilden. Ein solches Modell kann Empfehlungen liefern, wie Risiken, die etwa durch Zinsänderungen oder Abwanderung von Kunden entstehen können, durch geeignete Derivate, etwa Zins-Swaps, abgesichert werden können.
- Die oben skizzierte Bewertung von Derivaten wird heutzutage durch KI unterstützt, wodurch die Bedeutung der klassischen stochastischen Modelle zum Diskussionsthema wird. Bei der Replikation eines Derivats tritt allerdings folgendes Problem auf: Für das maschinelle Lernen steht nur

ein einziger Pfad zur Verfügung, eben jener Kursverlauf, den der Basiswert in der Vergangenheit tatsächlich hatte. Bewährte mathematische Modelle, die zufällige, aber ökonomisch sinnvolle Kursverläufe simulieren können, dienen hier zur Verbreiterung der Input-Daten.

Viele der dazu, und für viele andere Fragestellungen, eingesetzten mathematischen Methoden wurden erst in den letzten Jahren und Jahrzehnten entwickelt. Natürlich gehen diese Methoden weit über den Schulstoff hinaus, jedoch sollte ein Einblick in die Finanzmathematik auch nicht den Eindruck hinterlassen, dass die Tätigkeit von Mathematiker_inne_n in einer Bank aus der Lösung von 2×2 - Gleichungssystemen besteht. Die Frage "Was kann ich beruflich mit Mathematik machen?" sollte in Zeiten schwindender Studierenden-Zahlen in den mathematischen Studiengängen nicht zu kurz kommen, und wird mit Themen, die eine erschöpfende Behandlung in der Schule erlauben, schwer zu beantworten sein.

3. Aktuar_innen

Aktuar_innen sind Mathematiker_innen, die Wahrscheinlichkeiten und Risiken analysieren und bewerten. Die Spezialisierung Versicherungsmathematik des Masterstudiums Finanz- und Versicherungsmathematik deckt den akademischen Teil der Aktuarsausbildung ab. Aktuar_innen finden in vielen unterschiedlichen Bereichen die Möglichkeit ihr Wissen einzusetzen. Der klassische Einsatzbereich sind Versicherungsunternehmen, in denen Aktuar_innen für die Erstellung der Tarife und die richtige Reservierung verantwortlich sind. Aber schon in Versicherungsunternehmen finden sich schon viel mehr Einsatzgebiete wie das Risikomanagement, die Interne Revision oder im Bereich der Steuerung der Kapitalanlagen.

Außerhalb von Versicherungsunternehmen sind auch Pensionskassen, Banken, Wirtschaftsprüfer und Beratungsunternehmen sehr oft erfreut, wenn sie Aktuar_innen finden, da die im Studium vermittelten Methoden auch außerhalb der klassischen Versicherungswirtschaft viele Anwendungsbereiche finden. Schlussendlich eröffnet diese Ausbildung auch die Möglichkeit sich selbstständig zu machen, beispielsweise in der Bewertung von Pensions- und Abfertigungsrückstellungen für Unternehmen.

Abhängig von der Berufswahl ist der Arbeitsalltag für die Absolvent_innen sehr unterschiedlich. Manche sprechen den ganzen Tag Englisch, andere nur Deutsch. Einige arbeiten viel alleine, andere immer gemeinsam in Teams. Aufgrund der vielen unterschiedlichen Bereiche ergibt sich auch immer die Möglichkeit eine Anstellung zu finden, die der persönlichen Work-Life Balance am besten entspricht.

Literatur

Boado-Penas, M. C., Eisenberg, J., & Korn, R., (2021). Transforming public pensions: A mixed scheme with a credit granted by the state. *Insurance: Mathematics and Economics*, *96* (2021), 140–152.

Charpentier, A., (2024). *Insurance, biases, discrimination and fairness*. Springer.

Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R., (2020). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press.

Dorner, C., (2025). Ein mathematischer Blick in die Finanzwelt im Unterricht – es muss nicht immer eine Option sein. *Der Mathematikunterricht*, *71*.(2) (2025), 48–56.

Gerber, H. U., (2013). *Lebensversicherungsmathematik*. Springer-Verlag.

Gerhold, S., & Krühner, P., (2018). Dynamic trading under integer constraints. *Finance Stoch.*, *22*.(4) (2018), 919–957. https://doi.org/10.1007/s00780-018-0369-3

Hull, J. C., (2021). *Options, Futures, and Other Derivatives, Global Edition* ([11. Aufl.]). Pearson.